

Peter Kočman, mag. inž. teh. var.
peter.kocman@fgg.uni-lj.si



izr. prof. dr. Sebastjan Bratina, univ. dipl. inž. grad.
sebastjan.bratina@fgg.uni-lj.si



doc. dr. Jerneja Češarek Kolšek, univ. dipl. inž. grad.
jerneja.kolsek@fgg.uni-lj.si
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
Jamova cesta 2, 1000 Ljubljana



Znanstveni članek
UDK/UDC: 624.012.3:624.072(078.9)

NUMERIČNA ANALIZA MEHANSKEGA ODZIVA NAKNADNO PREDNAPETEGA BETONSKEGA NOSILCA Z NEPOVEZANIMI UKRIVLJENIMI KABLI

NUMERICAL ANALYSIS OF A POST- TENSIONED CONCRETE BEAM WITH UNBONDED CURVED CABLES

Povzetek

V članku predstavimo matematični model in ustrezen numerični postopek za analizo mehanskega odziva naknadno prednapetega betonskega nosilca z nepovezanimi ukrivljenimi kabli pri delovanju kratkotrajne statične obtežbe. Betonski del nosilca, ki je v splošnem armiran z mehko armaturo, modeliramo z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca, prednapete kable, ki potekajo znotraj betonskega nosilca, pa z modelom vrvi. Pri tem upoštevamo, da se kabel in betonski nosilec na medsebojnem stiku lahko zamakneta, ne moreta pa se razmakniti. Pojava lokalizacije deformacij in mehčanja betona v tlaku, ki običajno nastopi pri visokih nivojih obremenitev, modeliramo s t. i. »crack-band« modelom, s katerim omenjena pojava omejimo na končno dolžino nosilca. Primernost in natančnost razvitega modela prikažemo s primerjavo numeričnih in eksperimentalnih rezultatov mehanskega odziva prostoležečega in kontinuirnega nosilca, za katera so v literaturi na voljo dobro dokumentirani eksperimentalni rezultati. Ugotovimo zelo dobro ujemanje rezultatov.

Ključne besede: prednapeti beton, ukrivljeni kabli, naknadno napenjanje, numerični model, prostoležeči nosilec, kontinuirni nosilec

Summary

The paper presents a mathematical model and a corresponding numerical procedure for the analysis of the mechanical response of a post-tensioned concrete beam with unbonded curved cables under short-term static loading. The concrete part of the beam, which can be reinforced with soft reinforcement, is modeled with Reissner's in-plane beam model and the prestressed cables running inside the concrete beam are modeled with the rope model. It is assumed that the cable and the concrete beam may displace side-by-side, but cannot displace apart at the point of contact between them. The phenomena of localization of deformation and softening of the concrete under compression, which usually occur at high loads, are modeled with a well-established »crack-band« model, which limits these phenomena to the finite length of the beam. The suitability and accuracy of the developed model is demonstrated by comparing numerical and experimental results of a simply supported and a continuous beam, for which well documented experimental results are available in the literature. Finally, a very good agreement of the results is found.

Key words: prestressed concrete, curved cables, post-tensioning, numerical model, simply supported beam, continuous beam

1 UVOD

Prednapeti betonski nosilec je eden izmed najpogostejših konstrukcijskih elementov, ki se uporablja za premostitev večjih razponov pri različnih gradbenih objektih. Prednapeti beton, v katerega z napenjanjem jeklenega kabla vnesemo tlačne obremenitve, ima v primerjavi z armiranim betonom kar nekaj prednosti. Mednje štejemo predvsem večjo nosilnost betonskega prereza, ki omogoča gradnjo konstrukcij večjih razpetin oziroma prihranke vgrajenega materiala, mehka armatura in prednapeti kabli so zaradi tlačno obremenjenih prereзов bolj zaščiteni proti zunanjim vplivom, prednapenjanje konstrukcij pa omogoča tudi razvoj novih tehnologij gradnje. Glede na čas napenjanja obstajata dva načina prednapenjanja, in sicer predhodno in naknadno prednapenjanje. Pri prvem se kabel za prednapenjanje napne pred betoniranjem in sila prednapetja se vnese v ustrezno strjen beton preko sprijemnih napetosti med kablom in betonom, pri drugem pa je postopek napenjanja obraten, in sicer silo prednapenjanja vnašamo v strjeni beton preko sidrišč in kontaktnih napetosti vzdolž stika med kablom in betonom. Na začetku so kabli nepovezani z betonskim nosilcem, naknadno sprijemnost pa dosežemo z injektiranjem kabelskih cevi z ustrezno injekcijsko maso.

Prednapeti nosilec je sestavljen iz dveh komponent, iz armiranobetonskega nosilca in jeklenega kabla, pri čemer je slednji lahko raven, velikokrat pa je ukrivljen. Pri tem sta kabel in betonski ovoj, odvisno od izbire zgoraj omenjenega načina prednapenjanja, med seboj povezana (adhezijsko) ali pa nepovezana. Dosledno upoštevanje vpliva ukrivljenega kabla na deformiran betonski nosilec je relativno zahtevna naloga tako pri formulaciji matematičnega modela prednapetega elementa kot pri numeričnem reševanju izpeljanih enačb. V preteklosti se je vpliv ukrivljenih kablov na betonski nosilec pogosto nadomeščalo z ekvivalentno obtežbo, ki se med deformiranjem konstrukcije ni spreminjala. Žal pa z omenjeno poenostavitvijo v analizi ni bilo mogoče zajeti morebitne porušitve takšnega kompozitnega nosilca zaradi odpovedi kabla oziroma stika med kablom in betonom v primeru polne povezanosti. Danes pa naprednejši računski modeli vpliv kabla na betonski nosilec upoštevajo na različne načine z ustreznimi veznimi enačbami, ki so odvisne predvsem od izbire matematičnega modela. Primeri takšnih modelov so objavljeni v tuji literaturi (kot npr. [Burns, 1991], [Durand, 2023], [Jancy, 2023], [Lou, 2016]). Pri tem raziskovalci za modeliranje betonskega nosilca uporabijo enačbe 2D in 3D trdnega telesa ali pa nosilec matematično opišejo z modelom linijskega elementa. Izkaže se, da je slednji opis bistveno enostavnejši, k čemur največ prispeva bistveno manjše število končnih elementov, s katerimi diskretiziramo model v postopku numeričnega reševanja.

V tem članku predstavimo matematični model in ustrezen numerični postopek za analizo mehanskega odziva betonskega nosilca, prednapetega z nepovezanimi ukrivljenimi kabli. Betonski nosilec, armiran z mehko vzdolžno armaturo, matematično opišemo z modelom linijskega elementa, pri čemer kabel modeliramo ločeno. V modelu upoštevamo materialno nelinearnost. Na območju betonskega dela nosilca dodatno upoštevamo tudi možnost pojava lokalizacije deformacij ter mehčanja betona v tlaku pri visokih nivojih obremenitev, pri

čemer se potencialnim divergenčnim problemom izognemo z uporabo »crack-band« modela ([Bažant, 1989], [Bratina, 2004]), s katerim omenjena pojava omejimo na končno dolžino elementa (na t. i. »kratek« element), vzdolž katere predpišemo konstanten potek deformacij. To nam omogoča, da odziv konstrukcije uspešno analiziramo tudi v območju mejne in postkritične nosilnosti. Primernost in natančnost razvitega matematičnega modela in numeričnega postopka prikažemo s primerjavo numeričnih in eksperimentalnih rezultatov mehanskega odziva prostoležečega in kontinuirnega nosilca, za katera so v literaturi na voljo dobro dokumentirani eksperimentalni rezultati.

Članek ima poleg uvoda še štiri poglavja. V drugem poglavju predstavimo enačbe matematičnega modela, v tretjem poglavju predstavimo postopek numerične analize, v četrtem in petem poglavju pa prikažemo dva računska primera. Na koncu podamo zaključke.

2 MATEMATIČNI MODEL MEHANSKEGA ODZIVA PREDNAPETEGA AB-NOSILCA Z NEPOVEZANIMI UKRIVLJENIMI KABLI

Opazujemo mehanski odziv naknadno prednapetega betonskega nosilca z ravno težiščno osjo in s konstantnim prečnim prerezom s površino A_c , ki je simetričen glede na navpično os in je izpostavljen kratkotrajnemu delovanju zunanje mehanske obtežbe. Nosilec je v splošnem armiran s klasično (mehko) vzdolžno armaturo, pri čemer z A_s označimo ploščino njenega prečnega prereza. Pri tem predpostavimo, da je armatura togo povezana z betonom (kompatibilnost deformacij na medsebojnem stiku). Zaradi večje nazornosti nadaljnjih izpeljav predpostavimo, da je nosilec prednapet le z enim ukrivljenim kablom s ploščino prečnega prereza A_p . Predpostavimo, da ga napnemo z desne strani z začetno silo prednapetja $N_{p,0}$, na levi strani pa je kabel ustrezno sidran. Ker kabel in betonski nosilec med seboj nista povezana, se med napenjanjem oziroma deformiranjem nosilca medsebojno zamakneta, vzdolž njune stične površine pa se aktivira trenje. V nadaljevanju osnovne enačbe, s katerimi opišemo napestostno in deformacijsko stanje takšnega nosilca, predstavimo ločeno za betonski del nosilca s pripadajočo vzdolžno mehko armaturo (ta del v nadaljevanju poimenujemo armirano-betonski del nosilca) in ločeno za ukrivljen kabel. V besedilu in v enačbah uporabimo oznako $(\bullet)_c$ za količine, ki pripadajo betonskemu delu nosilca, oznako $(\bullet)_s$ za količine, ki pripadajo vzdolžni mehki armaturi, oznako $(\bullet)_p$ pa za količine, ki pripadajo prednapetemu kablju. Nedeformirano in deformirano konfiguracijo prednapetega nosilca prikažemo na sliki 1.

2.1 Kinematične enačbe

Deformiranje nosilca opišemo v tridimenzionalnem točkovnem evklidskem prostoru. Koordinate prostorskega koordinatnega sistema označimo z x, y, z , pripadajoče tangentne vektorje pa z $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ (glej sliko 1). Za opazovališče izberemo točko $(0, 0, 0)$ in jo označimo z 0 . Postavimo jo na začetek nosilca, in sicer v težišče prečnega prereza armiranobetonskega dela nosilca v nedeformirani konfiguraciji. Vpliv kabla in mehke armature na lego težišča pri tem zanemarimo. Posledično tudi težiščna os nosilca v nedeformirani konfiguraciji sovpada

z vzdolžno osjo x omenjenega koordinatnega sistema. Upoštevamo Bernoullijevo predpostavko o ravnih prečnih prerezi. Dodatno predpostavimo, da je prečni prerez, ki je v nedeformirani konfiguraciji pravokoten na težiščno os nosilca, nanjo pravokoten tudi v deformirani konfiguraciji. Za parametrizacijo težiščne osi ukrivljenega kabla, ki leži v ravnini (x, z) , izberemo naravni parameter s_p (slika 1). Slednji je definiran na intervalu $[0, l_s]$, pri čemer je l_s dolžina kabla.

2.1.1 Vezni enačbi

Pri izpeljavi veznih enačb opazujemo dve točki, točko T_c na armiranobetonskem nosilcu v neposredni bližini kabla, ki ima koordinate $(x_c, 0, z_c)$, ter točko T_p na kablju, ki ima ločno koordinato s_p^* oziroma prostorske koordinate $(x_p(s_p^*), 0, z_p(s_p^*))$. Točki sta v nedeformirani konfiguraciji zamaknjeni, v deformirani konfiguraciji pa sta soležni (glej sliko 1). V nedeformirani konfiguraciji je točki T_c soležna točki P_p na kablju z ločno koordinato s_p . Lego točke T_c v nedeformirani konfiguraciji torej določimo s krajevnim vektorjem:

$$\mathbf{R}_c = x_c \mathbf{e}_1 + z_c \mathbf{e}_3, \quad (1)$$

lego točke T_p na kablju, prav tako v nedeformirani konfiguraciji, pa s krajevnim vektorjem:

$$\mathbf{R}_p = x_p(s_p^*) \mathbf{e}_1 + z_p(s_p^*) \mathbf{e}_3. \quad (2)$$

V deformirani konfiguraciji je lega točke T_c armiranobetonskega dela nosilca določena s krajevnim vektorjem:

$$\mathbf{r}_c = (x_c + u_c + z_c \sin \varphi_c) \mathbf{e}_1 + (w_c + z_c \cos \varphi_c) \mathbf{e}_3, \quad (3)$$

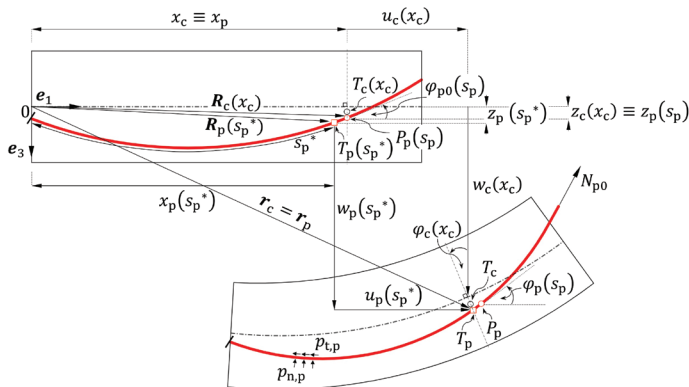
lego točke T_p na kablju pa s krajevnim vektorjem:

$$\mathbf{r}_p = (x_p(s_p^*) + u_p(s_p^*)) \mathbf{e}_1 + (z_p(s_p^*) + w_p(s_p^*)) \mathbf{e}_3. \quad (4)$$

V enačbah (1)–(4) je u_c vodoravni pomik, w_c navpični pomik težiščne osi armiranobetonskega dela nosilca pri koordinati x_c , φ_c je zasuk prečnega prereza, ki gre skozi točko T_c , u_p in w_p pa sta vodoravni oziroma navpični pomik točke T_p kabla.

Ker sta točki T_c in T_p v deformirani konfiguraciji soležni, velja $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_p$ oziroma v komponenti obliki:

$$x_c + u_c + z_c \sin \varphi_c = x_p(s_p^*) + u_p(s_p^*), \quad (5)$$



Slika 1. Nedeformirana in deformirana konfiguracija prednapetega nosilca.

$$w_c + z_c \cos \varphi_c = z_p(s_p^*) + w_p(s_p^*). \quad (6)$$

Ob predpostavki, da so pomiki, zasuki in zamiki prednapetega nosilca majhni, lahko vezni enačbi (5) in (6) lineariziramo okoli začetne nedeformirane konfiguracije [Hughes, 1978] in dobimo:

$$u_c + z_c \varphi_c = (s_p^* - s_p) \cos \varphi_{p0}(s_p) + u_p(s_p), \quad (7)$$

$$w_c = (s_p^* - s_p) \sin \varphi_{p0}(s_p) + w_p(s_p). \quad (8)$$

V enačbah (7)–(8) s φ_{p0} označimo kot, ki ga oklepa tangenta krivulje kabla s težiščno osjo armiranobetonskega dela nosilca pri ločni koordinati s_p v začetni nedeformirani konfiguraciji (v točki P_p).

2.1.2 Armiranobetonski del nosilca

Ob že omenjeni predpostavki, da so pomiki in zasuki nosilca med deformiranjem majhni, lahko konsistentno lineariziramo tudi osnovne kinematične enačbe linijskega nosilca [Reissner, 1972]. Pri tem dobimo:

$$\varepsilon_{c0} = \frac{du_c}{dx_c}, \quad (9)$$

$$\varphi_c = -\frac{dw_c}{dx_c}, \quad (10)$$

$$\kappa_c = \frac{d\varphi_c}{dx_c}. \quad (11)$$

V enačbah je ε_{c0} specifična sprememba dolžine (osna deformacija), κ_c pa ukrivljenost (upogibna deformacija) armiranobetonskega dela nosilca v njegovi težiščni osi.

2.1.3 Ukrivljen kabel

Tudi deformiranje kabla za prednapenjanje, ki je v nedeformirani konfiguraciji ukrivljen, opišemo s konsistentno lineariziranimi Reissnerjevimi enačbami [Reissner, 1972]:

$$(\varphi_p - \varphi_{p0}) \sin \varphi_{p0} + \frac{du_p}{ds_p} - \varepsilon_p \cos \varphi_{p0} = 0, \quad (12)$$

$$(\varphi_p - \varphi_{p0}) \cos \varphi_{p0} + \frac{dw_p}{ds_p} + \varepsilon_p \sin \varphi_{p0} = 0, \quad (13)$$

$$\kappa_p - \frac{d\varphi_p}{ds_p} = 0. \quad (14)$$

Pri tem je ε_p specifična sprememba dolžine kabla (osna deformacija), κ_p ukrivljenost kabla, φ_p pa kot, ki ga oklepa tangenta krivulje kabla s težiščno osjo armiranobetonskega dela nosilca pri ločni koordinati s_p v deformirani konfiguraciji. Zasuk φ_p lahko s pomočjo veznih in kinematičnih enačb izrazimo z ostalimi kinematičnimi in deformacijskimi količinami.

2.2 Ravnotežne enačbe

2.2.1 Ravnotežne enačbe armiranobetonskega dela nosilca

Ravnotežne enačbe armiranobetonskega dela nosilca zapišemo v obliki treh diferencialnih enačb prvega reda [Reissner, 1972], ki so v linearizirani obliki izražene kot:

$$\frac{dN_c}{dx_c} + q_{x,c} + p_{x,c} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{dQ_c}{dx_c} + q_{z,c} + p_{z,c} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{dM_c}{dx_c} - Q_c + m_c + z_c p_{x,c} = 0. \quad (17)$$

V enačbah (15)–(17) je N_c osna sila, Q_c prečna sila in M_c upogibni moment v armiranobetonskem delu nosilca, $q_{x,c}$ in $q_{z,c}$ sta zunanji linijski obtežbi nosilca v smeri osi x oziroma z , m_c je momentna linijska obtežba okrog osi y , $p_{x,c}$ in $p_{z,c}$ pa sta komponenti kontaktne linijske obtežbe v smeri osi x oziroma z na stiku med armiranobetonskim delom nosilca in kablom.

2.2.2 Ravnotežne enačbe kabla

Pri izpeljavi ravnotežnih enačb kabla upoštevamo, da ima zanemarljivo upogibno in strižno togost. Posledično se ravnotežni enačbi izrazita kot:

$$\frac{dN_p}{ds_p} + p_{t,p} = 0, \quad (18)$$

$$N_p \kappa_{p0} + p_{n,p} = 0. \quad (19)$$

V enačbah (18)–(19) je N_p osna sila v kablju, $p_{t,p}$ in $p_{n,p}$ sta strižna oziroma normalna komponenta kontaktne linijske obtežbe na stiku med kablom in armiranobetonskim delom nosilca. S κ_{p0} označimo ukrivljenost kabla v začetni nedeformirani konfiguraciji in jo izračunamo s pomočjo naslednje enačbe [Kline, 1977]:

$$\kappa_{p0} = \frac{\frac{d^2 z_p}{dx_c^2}}{\left(1 + \left(\frac{dz_p}{dx_c}\right)^2\right)^{2/3}}. \quad (20)$$

2.2.3 Statični vezni enačbi

Poleg kinematičnih veznih enačb moramo v modelu zagotoviti tudi ravnotežje kontaktnih sil na stiku med armiranobetonskim delom nosilca in ukrivljenim kablom. To zagotovimo s statičnimi veznimi enačbama, ki ju zapišemo v komponentni obliki:

$$p_{t,c} = -p_{t,p} \frac{ds_p}{dx_c}, \quad (21)$$

$$p_{n,c} = -p_{n,p} \frac{ds_p}{dx_c}. \quad (22)$$

Komponenti kontaktne linijske obtežbe v smeri osi x oziroma z , s katerimi kabel učinkuje na armiranobetonski del nosilca (glej ravnotežne enačbe armiranobetonskega nosilca (15)–(17)), pa izračunamo s pomočjo naslednjih izrazov:

$$p_{x,c} = p_{t,c} \cos \varphi_{p0} + p_{n,c} \sin \varphi_{p0}, \quad (23)$$

$$p_{z,c} = -p_{t,c} \sin \varphi_{p0} + p_{n,c} \cos \varphi_{p0}. \quad (24)$$

2.3 Konstitucijske enačbe

2.3.1 Konstitucijske enačbe betonskega dela nosilca in togo povezane mehke vzdolžne armature

Zaradi Bernoullijeve predpostavke o ravnih prečnih prerezih osno deformacijo poljubnega vzdolžnega vlakna betonskega dela nosilca zapišemo kot $\varepsilon_c = \varepsilon_{c0} + z_c \kappa_c$, osno deformacijo j -te

vzdolžne armaturne palice pa kot $\varepsilon_{s,j} = \varepsilon_{c0} + z_{s,j} \kappa_c$, kjer je $z_{s,j}$ oddaljenost j -te armaturne palice od težiščne osi nosilca. Tako določenim deformacijam s pomočjo konstitucijskih zakonov oz. zvez v obliki $\sigma_i - \varepsilon_i$ ($i = c, s$), ki jih dobimo s standardnimi enosnimi preizkusi materialnih vzorcev ali pa jih povzamemo iz dostopne literature, pripišemo še pripadajoče normalne napetosti σ_i . S pomočjo slednjih lahko definiramo konstitucijski osni sili $N_{c,c}$ in $N_{s,c}$ oziroma konstitucijska upogibna momenta $M_{c,c}$ in $M_{s,c}$ armiranobetonskega dela nosilca ter ustrezni konstitucijski enačbi:

$$N_c = N_{c,c}(\varepsilon_c) + N_{s,c}(\varepsilon_s) = \int_{A_c} \sigma_c(\varepsilon_c) dA_c + \sum_j \sigma_{s,j}(\varepsilon_{s,j}) A_{s,j}, \quad (25)$$

$$M_c = M_{c,c}(\varepsilon_c) + M_{s,c}(\varepsilon_s) = \int_{A_c} z_c \sigma_c(\varepsilon_c) dA_c + \sum_j z_{s,j} \sigma_{s,j}(\varepsilon_{s,j}) A_{s,j}. \quad (26)$$

V tem članku zvezo med normalno napetostjo in deformacijo tlačno obremenjenega betona opišemo z nelinearnim konstitucijskim zakonom po Desayiju in Krishnanu [Desayi, 1964], zvezo med napetostjo in deformacijo natezno obremenjenega betona pa z bilinearnim konstitucijskim zakonom po Berganu in Holandu [Bergan, 1979] (glej sliko 2(a)). Pri tem je f_{cm} tlačna trdnost betona, dosežena pri deformaciji ε_{c1} , ε_{cu} je mejna (porušna) tlačna deformacija betona, f_{ct} je natezna trdnost betona, ε_{ct1} je pripadajoča natezna deformacija, ε_{ctu} je mejna natezna deformacija betona, E_c pa je modul elastičnosti betona.

Zvezo med napetostjo in deformacijo armature, tako v nategu kot tlaku, opišemo z idealiziranim bilinearnim diagramom, ki ga povzamemo po standardu SIST EN 1992-1-1 [SIST, 2005]. Parametri modela so: f_{yk} je karakteristična napetost na meji elastičnosti, E_s je modul elastičnosti armature, f_{tk} je karakteristična natezna trdnost armature, ε_{su} pa je mejna (porušna) deformacija. V konstitucijskih modelih betona in armature dodatno upoštevamo tudi izotropno utrjevanje.

2.3.2 Konstitucijske enačbe prednapetega kabla

Podobno kot smo definirali prispevek mehke vzdolžne armature $N_{s,c}$ h konstitucijski osni sili armiranobetonskega dela nosilca (glej enačbo (25)), definiramo tudi konstitucijsko osno silo prednapetega kabla $N_{p,c}$ ter ustrezno konstitucijsko enačbo:

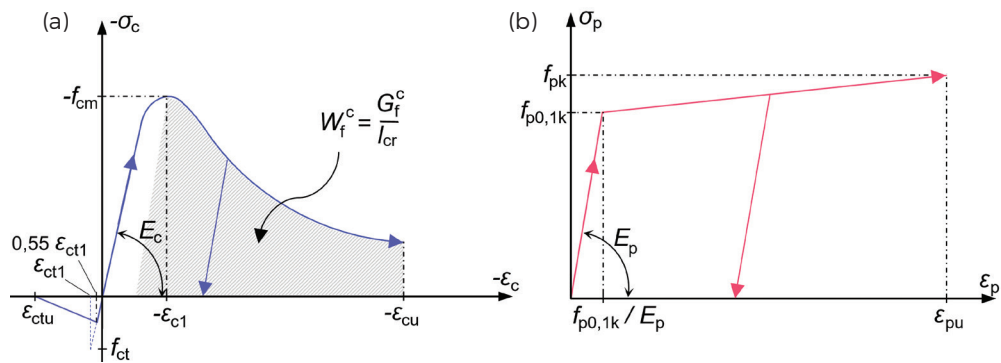
$$N_p = N_{p,c}(\varepsilon_p + \varepsilon_{p0}) = \sigma_p(\varepsilon_p + \varepsilon_{p0}) A_p. \quad (27)$$

Pri tem je ε_{p0} začetna elastična deformacija kabla zaradi prednapenjanja, ki jo izračunamo kot:

$$\varepsilon_{p0} = \frac{N_{p0}}{E_p A_p}, \quad (28)$$

kjer je N_{p0} začetna sila prednapetja.

Zvezo med napetostjo in osno deformacijo kabla opišemo z idealiziranim bilinearnim diagramom, ki ga prav tako povzamemo po standardu SIST EN 1992-1-1 [SIST, 2005]. Prikazujemo ga na sliki 2(b). Pri tem so parametri modela sledeči: $f_{p0,1k}$ je napetost jekla za prednapenjanja pri 0,1-odstotni nepovratni deformaciji, E_p je modul elastičnosti, f_{pk} je karakteristična natezna trdnost jekla in ε_{pu} mejna (porušna) deformacija.



Slika 2. Konstitucijski zakon (a) betona in (b) kabla.

2.3.3 Konstitucijski zakon stika

V predstavljenem modelu sta kabel in okoliški beton nepovezana. Ob premikanju kabla, ki poteka v posebnih ceveh, se vzdolž stika aktivira le sila trenja (strižna komponenta kontaktnih napetosti $p_{t,p}$), ki je odvisna od normalne komponente kontaktnih napetosti $p_{n,p}$. Njuno zvezo zapišemo v obliki:

$$p_{t,p} = k_t p_{n,p}, \tag{29}$$

kjer je k_t koeficient trenja, ki je v splošnem podatek proizvajalca.

nje statične količine. V skladu z variacijsko formulacijo predstavljenih enačb v obliki modificiranega izreka o virtualnem delu, ki v prikazanem modelu predstavlja osnovo za numerično reševanje enačb z metodo končnih elementov, lahko robne pogoje predpišemo le v vozliščih mreže končnih elementov. Robne pogoje, ločeno za armiranobetonski del nosilca in za kabel, predstavimo v preglednici 1. Pri tem pa lahko izberemo le kinematični ali statični robni pogoj, nikoli pa ne obeh hkrati. Dodatno v preglednici 1 definiramo še sile in momente, s katerimi kabel učinkuje na armiranobetonski del nosilca na njegovih koncih, tj. na mestu sidranja oziroma napenjanja (sidrna in napenjalna glava).

2.4 Robni pogoji

Za reševanje predstavljenih enačb, s katerimi opišemo mehansko obnašanje prednapetega betonskega nosilca, so ključnega pomena robni pogoji. Prvo skupino robnih pogojev imenujemo kinematični robni pogoji, s katerimi predpišemo pomike oz. zasuke nosilca. V drugo skupino pa uvrstimo statične robne pogoje, s katerimi v prednapetem nosilcu predpišemo notra-

3 NUMERIČNO REŠEVANJE ENAČB Z METODO KONČNIH ELEMENTOV

Sistem enačb (preglednica 2) armiranobetonskega nosilca, prednapetega z ukrivljenim kablom, moramo reševati numerično, saj je problem nelinearen. Pri reševanju enačb uporabimo metodo končnih elementov, pri kateri interpoliramo

Robni pogoji za armiranobetonski del nosilca:			
$u_c(0)=u_{c,0}$			$N_c(0)+S_{c,1}=0$
$w_c(0)=w_{c,0}$			$Q_c(0)+S_{c,2}=0$
$\varphi_c(0)=\varphi_{c,0}$			$M_c(0)+S_{c,3}=0$
$u_c(L)=u_{c,L}$	ali		$N_c(L)-S_{c,4}=0$
$w_c(L)=w_{c,L}$			$Q_c(L)-S_{c,5}=0$
$\varphi_c(L)=\varphi_{c,L}$			$M_c(L)-S_{c,6}=0$
Robni pogoji za kabel:			
$u_p(0)=u_c(0)+z_p(0)\varphi_c(0)$			$N_p(0)+S_{p,1}(0)=0$
$\Delta u_p(L)=\Delta u_c(L)+z_p(L)\Delta\varphi_c(L)$	ali		$N_{p0}-S_{p,4}(L)=0$
Vpliv kabla na obeh koncih armiranobetonskega dela nosilca:			
$S_{c,1}(0)=N_p(0)\cos\varphi_{p0}(0)$			$S_{c,4}(L)=-N_{p0}\cos\varphi_{p0}(L)$
$S_{c,2}(0)=-N_p(0)\sin\varphi_{p0}(0)$		in	$S_{c,5}(L)=N_{p0}\sin\varphi_{p0}(L)$
$S_{c,3}(0)=S_{c,1}(0)z_p(0)$			$S_{c,6}(L)=S_{c,4}(L)z_p(L)$

Preglednica 1. Robni pogoji za prednapeti betonski nosilec.

Vezne enačbe:
$u_c + z_p \varphi_c = (s_p^* - s_p) \cos \varphi_{p0} + u_p$
$w_c = (s_p^* - s_p) \sin \varphi_{p0} + w_p$
Kinematične enačbe armiranobetonskega dela nosilca:
$\varepsilon_{c0} = \frac{du_c}{dx_c}$
$\varphi_c = -\frac{dw_c}{dx_c}$
$\kappa_c = \frac{d\varphi_c}{dx_c}$
Kinematične enačbe kabla:
$(\varphi_p - \varphi_{p0}) \sin \varphi_{p0} + \frac{du_p}{ds_p} - \varepsilon_p \cos \varphi_{p0} = 0$
$(\varphi_p - \varphi_{p0}) \cos \varphi_{p0} + \frac{dw_p}{ds_p} + \varepsilon_p \sin \varphi_{p0} = 0$
$\kappa_p - \frac{d\varphi_p}{ds_p} = 0$
Ravnatežne enačbe armiranobetonskega dela nosilca:
$\frac{dN_c}{dx_c} + q_{x,c} + p_{x,c} = 0$
$\frac{dQ_c}{dx_c} + q_{z,c} + p_{z,c} = 0$
$\frac{dM_c}{dx_c} - Q_c + m_c + z_c p_{x,c} = 0$
Ravnatežne enačbe kabla:
$\frac{dN_p}{ds_p} + p_{t,p} = 0$
$N_p \kappa_{p0} + p_{n,p} = 0$
$p_{t,p} = k_t p_{n,p}$
$p_{x,c} = p_{t,c} \cos \varphi_{p0} + p_{n,c} \sin \varphi_{p0}$
$p_{z,c} = -p_{t,c} \sin \varphi_{p0} + p_{n,c} \cos \varphi_{p0}$
Konstitucijske enačbe armiranobetonskega dela nosilca:
$N_c = N_{c,c}(\varepsilon_c) + N_{s,c}(\varepsilon_s)$
$M_c = M_{c,c}(\varepsilon_c) + M_{s,c}(\varepsilon_s)$
Konstitucijska enačba kabla:
$N_p = N_{p,c}(\varepsilon_p + \varepsilon_{p0})$
Neznanke:
$u_c, w_c, \varphi_c, u_p, w_p, \varphi_p, \varepsilon_{c0}, \kappa_c, \varepsilon_p, \kappa_p, N_c, Q_c, M_c, N_p, p_{n,p}, p_{t,p}, p_{x,c}, p_{z,c}, s_p^*$

Preglednica 2. Sistem enačb in nabor neznanih količin.

deformacijske količine [Markovič, 2013]. V nasprotju s klasičnimi končnimi elementi, ki so zasnovani na interpolaciji pomikov, so deformacijski končni elementi veliko bolj stabilni in

odporni proti različnim oblikam blokiranja. Numerične težave, ki se pojavijo pri lokalizaciji deformacij in mehčanju betona pri velikih tlačnih obremenitvah, pa rešimo z vpeljavo že omenjenega »kratkega« elementa ([Bažant, 1989], [Bratina, 2004]), pri čemer je njegova dolžina l_{cr} odvisna od energije drobljenja betona v tlaku G_f^c in poteka konstitucijskega modela betona v območju mehčanja (glej diagram na sliki 2(a)). Pri označevanju deformacijskih končnih elementov vpeljemo naslednji oznaki: standardni element označimo z E_{m-n}^c , kjer indeks m predstavlja stopnjo Lagrangejevega interpolacijskega polinoma, s katerim interpoliramo deformacijske količine vzdolž elementa, n pa stopnjo numerične Lobattove integracije, s katero izvednotimo integrale v enačbah končnega elementa. »Kratek« element označimo z $E_{0,1}^c$, saj so vzdolž njegove dolžine deformacijske količine konstantne, ravnatežje količin pa zadoščamo le v prečnem prerezu na sredini elementa ([Bažant, 1989], [Bratina, 2004]).

Z znanimi postopki v numerični teoriji konstrukcij v nadaljevanju vse enačbe združimo v enačbo konstrukcije $G(x, \lambda) = 0$. Pri tem z x označimo vektor neznanih vozliščnih pomikov in zasukov ter statičnih količin na robovih končnih elementov, λ pa je obtežni faktor konstrukcije. Za izbrani obtežni faktor sistem enačb konstrukcije rešimo iterativno ($i = 0, 1, 2, \dots$), v splošnem z Newtonovo metodo, ki je med inkrementno-iteracijskimi metodami najpreprostejša:

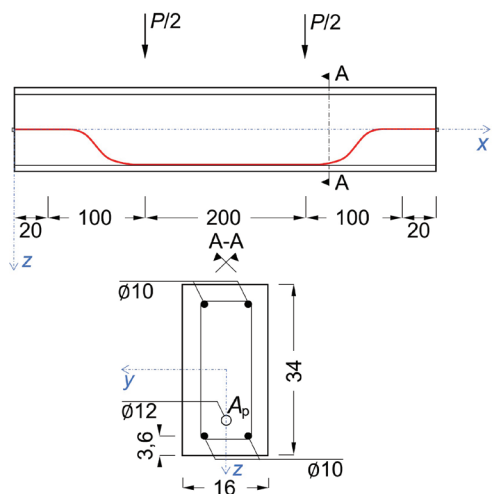
$$\nabla_x G(x_i, \lambda) \delta x_{i+1} = -G(x_i, \lambda), \quad x_{i+1} = x_i + \delta x_{i+1}. \quad (30)$$

Izraz $\nabla_x G$ imenujemo tangentna togostna matrika konstrukcije. Člene le-te izvednotimo numerično. Ker pa se izkaže, da v območju mejne obtežbe konstrukcije Newtonova metoda odpove, raje uporabimo standardno metodo ločne dolžine [Crisfield, 1981]. Pri tej metodi vodimo posplošene vozliščne pomike, zato takšna inkrementno-iteracijska metoda omogoča rešitev enačb konstrukcije tudi v območju kritične in poskritične nosilnosti.

4 PRVI RAČUNSKI PRIMER: PREDNAPETI PROSTOLEŽEČI NOSILEC

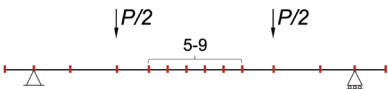
V prvem računskem primeru obravnavamo mehanški odziv naknadno prednapetega prostoležečega nosilca, izpostavljenega kratkotrajnemu delovanju statične obtežbe, za katerega v literaturi obstajajo dobro dokumentirani rezultati preizkusa [Hussien, 2012]. Na sliki 3 prikazujemo osnovne geometrijske podatke prednapetega nosilca, ki je armiran z vzdolžno (4 palice premera 10 mm) in strižno armaturo. Pri starosti 28 dni je bil obojestransko prednapet z enim nepovezanim kablom ($A_p = 0,99 \text{ cm}^2$). Po končanem napenjanju je izmerjena sila prednapenjanja v kablju na sredini razpetine nosilca znašala 104 kN. Med preizkusom sta se navpični točkovni sili ciklično povečevali vse do porušitve nosilca. Med preizkusom so bili merjeni navpični povese nosilca, vzdolžne deformacije kabla, mehke armature in betona, zabeležen pa je bil tudi način porušitve nosilca (plastifikacija mehke armature, ki mu je sledilo drobljenje tlačnega betona in nato porušitev kabla).

Vrednosti materialnih parametrov, ki jih potrebujemo za uspešno izvedbo mehanske analize, predstavimo v preglednici 3. Podatke o trdnostih materialov smo povzeli iz vira [Hussein,



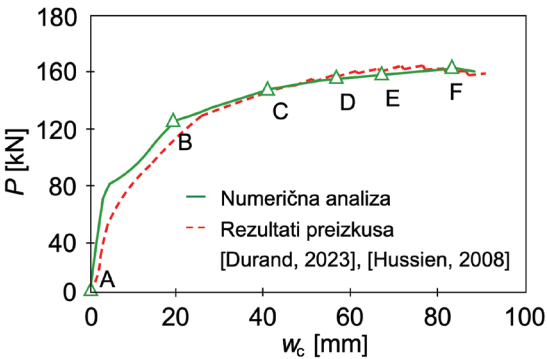
Slika 3. Prostoležeči nosilec, prednapet z nepovezanim ukrivljenim kablom [Hussien, 2012] (dimenzije so v cm).

2012]. preostale vrednosti pa smo določili s pomočjo standarda SIST EN 1992-1-1 [SIST, 2005] in drugih virov ([Bergan, 1979], [CEB-FIP, 1993], [Kratzig, 2004]). Vrednost koeficienta trenja med prednapetim kablom in plastično cevjo smo ocenili s pomočjo predhodnih parametričnih analiz, opravljenih v sklopu te raziskave.



Slika 4. Mreža končnih elementov, uporabljena v numerični analizi.

Ugotovimo, da se izračunani pomiki zelo dobro prilegajo izmerjenim [Hussien, 2012]. Izračunano obtežno-deformacijsko krivuljo dodatno opremo s šestimi karakterističnimi točkami (točke od A do F). Slednje označujejo šest izmed 62 obtežnih inkrementov, pri katerih se zgodijo spremembe stanja



Slika 5. Razvoj navpičnega pomika na sredini razpetine nosilca v odvisnosti od obtežbe.

Beton		Armatura		Kabel	
f_{cm}	4,3 kN/cm ²	f_{yk}	47 kN/cm ²	$f_{p0,1k}$	167,4 kN/cm ²
ϵ_{c1}	-0,00225	f_{tk}	61 kN/cm ²	f_{pk}	186 kN/cm ²
ϵ_{cu}	-0,0035	ϵ_{su}	0,05	ϵ_{pu}	0,013
ϵ_{ct1}	0,0001	E_s	20000 kN/cm ²	E_p	19500 kN/cm ²
ϵ_{ctu}	0,0007			k_t	0,1
E_c	3400 kN/cm ²				
G_f^c	12,8 N/mm				
l_{cr}	20 cm				
lastna teža	1,36 kN/m				

Preglednica 3. Vrednosti materialnih parametrov, upoštevanih v numerični analizi.

V numerični analizi nosilec modeliramo z 8 linijskimi končnimi elementi tipa E_{4-5} in 5 "kratkimi" elementi tipa E_{0-1} , kot to prikazuje slika 4. "Kratke" elemente uporabimo na sredini razpetine nosilca, kjer se med analizo pojavijo največje tlačne obremenitve v betonu (elementi 5 do 9). Obtežno-deformacijsko krivuljo določimo s pomočjo standardne metode ločne dolžine. Skladno s to metodo vozliščne pomike nosilca inkrementno povečujemo od začetnega, neobteženega stanja ($P = 0$) pa do njegove porušitve. Za to potrebujemo 62 obtežnih inkrementov.

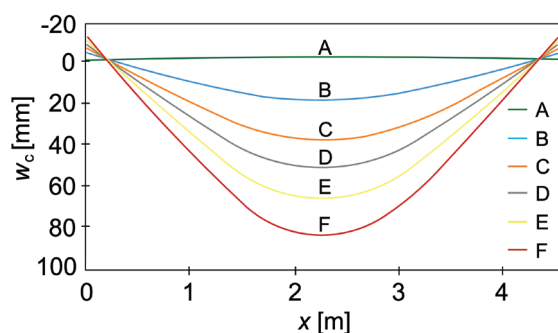
Na sliki 5 najprej predstavimo primerjavo med izračunanim in izmerjenim razvojem navpičnega pomika w_c na sredini razpetine opazovanega nosilca v odvisnosti od velikosti obtežbe P .

v analiziranem nosilcu. Ta stanja so opisana v preglednici 4. Plastifikacija mehke armature (točka B) nastopi pri obtežbi $P = 106,8$ kN oziroma pomiku $w_c = 18,9$ mm (izmerjene vrednosti so bile 115 kN oz. 29,2 mm [Hussien, 2012]), računsko določena največja obtežba nosilca (točka F) pa znaša $P_{max} = 139,6$ kN pri pomiku $w_c = 84,6$ mm. Izmerjeni mejni vrednosti sta bili 141 kN in 76 mm [Hussien, 2012]. Med preizkusom je bila porušitev nosilca posledica porušitve kabla [Hussien, 2012], v numerični analizi pa se je to odrazilo s prekoračitvijo porušne deformacije kabla (materialno mehčanje kabla). Med numerično analizo (od točke E dalje) smo zaznali tudi mehčanje betona v tlaku in lokalizacijo deformacij v območju med navpičnimi silama, a omenjena pojava nista bila tako izrazita in nista povzročila tlačne porušitve betona ($|\epsilon_c| < |\epsilon_{cu}|$).

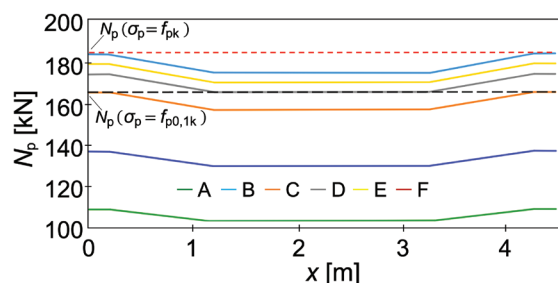
A	B	C	D	E	F
1. inkrement	16. inkrement	29. inkrement	38. inkrement	58. inkrement	60. inkrement
neobtežen nosilec (samo lastna teža)	plastifikacija spodnje armature v polju	plastifikacija kabla ob sidrišču	plastifikacija kabla v polju	mehčanje betona v tlaku v polju	P_{max} : dosežena natezna trdnost kabla ob sidrišču

Preglednica 4. Stanja v analiziranem nosilcu pri karakterističnih točkah na obtežno-deformacijski krivulji.

V nadaljevanju na sliki 6 prikažemo še izračunane deformirane oblike nosilca, na sliki 7 pa potek izračunanih sil v kablju, ki pripadajo karakterističnim točkam od A do F, prikazanih na obtežno-deformacijski krivulji. S slike 6 ugotovimo, da je prednapet nosilec pred nastopom obtežbe deformiran navzgor, kar je seveda pričakovano. Na sliki 7 pa je lepo viden nastop plastifikacije kabla ob sidrišču ($\sigma_p = f_{p0,1k}$; krivulja za karakteristično točko C), nastop plastifikacije kabla v polju (krivulja za D) ter dosežena natezna trdnost kabla ob sidrišču ($\sigma_p = f_{pk}$; krivulja za F).



Slika 6. Izračunane deformirane oblike nosilca, ki pripadajo karakterističnim točkam od A do F na obtežno-deformacijski krivulji.

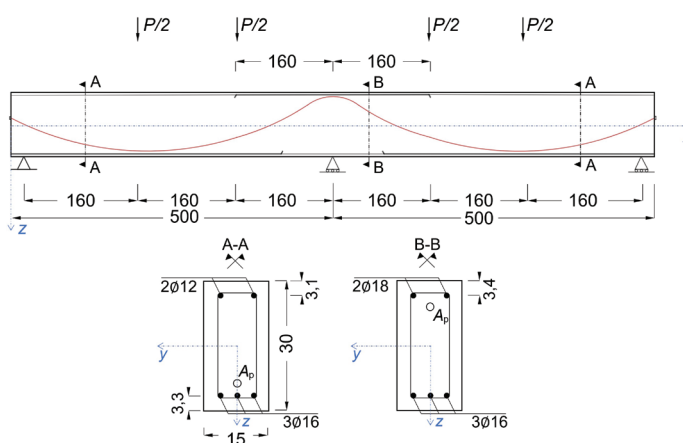


Slika 7. Izračunane sile v kablju, ki pripadajo karakterističnim točkam od A do F na obtežno-deformacijski krivulji.

5 DRUGI RAČUNSKI PRIMER: PREDNAPETI NOSILEC PREKO DVEH POLJ

V drugem računskem primeru obravnavamo mehanski odziv naknadno prednapetega armiranobetonskega kontinuirnega nosilca preko dveh polj. Rezultate preizkusa podajata Chen [Chen, 2008] in Lou s sodelavci [Lou, 2016], ki je nosilec tudi numerično analiziral z lastnim matematičnim modelom nosilca. Na sliki 8 prikazujemo osnovne geometrijske podatke nosilca, ki je

armiran z vzdolžno in strižno armaturo. Naknadno je bil prednapet z enim kablom ($A_p = 1,4 \text{ cm}^2$) z začetno silo prednapetja $N_{p0} = 165 \text{ kN}$. Med preizkusom je bil nosilec obtežen s štirimi navpičnimi točkovnimi silami, ki so se povečevale vse do porušitve nosilca. Med preizkusom sta bila merjena navpični povos na sredini obeh polj nosilca in sila v kablju.



Slika 8. Kontinuirni prednapeti nosilec z nepovezanim ukrivljenim kablom [Lou, 2016] (dimenzije so v cm).

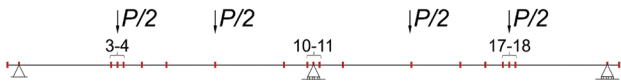
Vrednosti materialnih parametrov, ki jih potrebujemo za uspešno izvedbo mehanske analize, predstavimo v preglednici 5. Podatke o trdnostih lastnosti materialov povzamemo iz vira [Lou, 2016], vrednosti preostalih parametrov pa ocenimo s pomočjo standarda SIST EN 1992-1-1 [SIST, 2005] in napotkov iz drugih virov ([Bergan, 1979], [CEB-FIP, 1993], [Kratzig, 2004]). V analizi upoštevamo, da je bil kabel prednapet le z desne strani. Vrednost koeficienta trenja med prednapetim kablom in plastično cevjo smiselno izberemo na podlagi predhodnih parametričnih analiz, opravljenih v sklopu te raziskave. Za izpolnitev sovsnosti med energijo drobljenja betona G_f^c in dolžino »kratkega« elementa l_{cr} (glej sliko 2(a)) konstitucijski zakon betona v območju mehčanja ustrezno korigiramo, in sicer upoštevamo linearno zmanjševanje tlačnih napetosti vse do vrednosti 0, ki je dosežena pri deformaciji ϵ_{cu} .

Analizirani nosilec modeliramo s 14 linijskimi elementi tipa $E_{4,5}$ in 6 "kratki" elementi tipa $E_{0,1}$, kot to prikazujemo na sliki 9. Kratke elemente uporabimo na mestih, kjer pričakujemo največje tlačne obremenitve v betonu, tj. na sredini obeh razpetin in ob vmesni podpori (elementi 3, 4, 10, 11 ter 17 in 18). Tudi v tem primeru obtežno-deformacijsko krivuljo določimo s po-

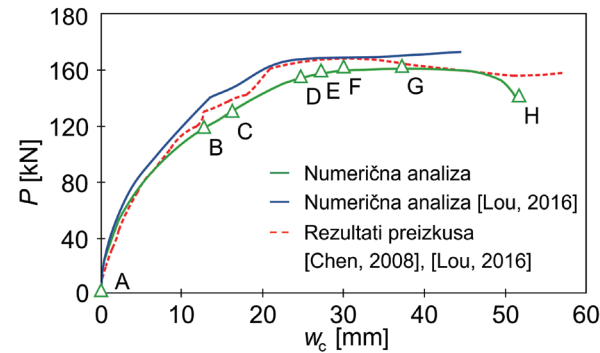
Beton		Armatura		Kabel	
f_{cm}	3,83 kN/cm ²	$f_{yk,\phi 10(16; 18)}$	36,1(38,4; 36,4) kN/cm ²	$f_{p0,1k}$	176 kN/cm ²
ϵ_{c1}	-0,0022	$f_{tk,\phi 10(16; 18)}$	40,3(42,6; 40,6) kN/cm ²	f_{pk}	194,1 kN/cm ²
ϵ_{cu}	-0,03	ϵ_{su}	0,04	ϵ_{pu}	0,02
ϵ_{ct1}	0,0001	E_s	20000 kN/cm ²	E_p	19700 kN/cm ²
ϵ_{ctu}	0,0007			k_t	0,02
E_c	3300 kN/cm ²				
G_f^c	55 N/mm				
l_{cr}	10 cm				
lastna teža	1,13 kN/m				

Preglednica 5. Vrednosti materialnih parametrov, upoštevanih v numerični analizi.

močjo standardne metode ločne dolžine. Skladno s to metodo vozliščne pomike nosilca inkrementno povečujemo od začetnega, neobteženega stanja ($P = 0$) pa do njegove porušitve. Za to potrebujemo 41 obtežnih inkrementov.



Slika 9. Mreža končnih elementov, uporabljena v numerični analizi.

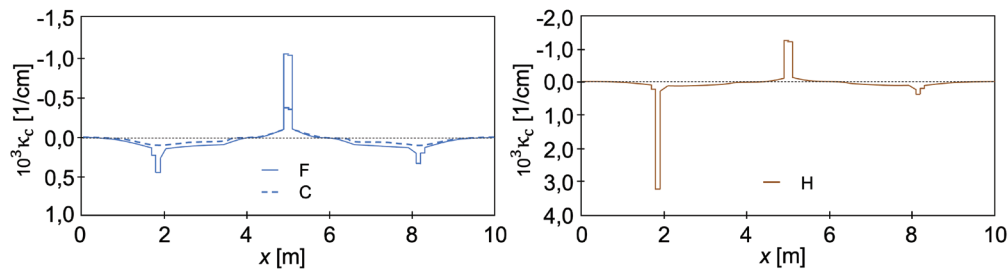


Slika 10. Razvoj navpičnega pomika na sredini levega polja nosilca v odvisnosti od obtežbe.

Tudi pri drugem računskem primeru najprej predstavimo primerjavo med izračunanim in izmerjenim razvojem navpičnega pomika w_c na sredini levega polja nosilca v odvisnosti od velikosti obtežbe P (glej sliko 10). Tudi v tem primeru se izračunani pomiki zelo dobro prilegajo izmerjenim. Obtežno-deformacijsko krivuljo zopet opremimo s šestimi karakterističnimi točkami (točke od A do H). Te točke predstavljajo 8 izmed 41 obtežnih inkrementov, pri katerih se zgodi sprememba stanja v analiziranem nosilcu. Ta stanja so opisana v preglednici 6. Najprej nastopi plastifikacija zgornje (natezne) armature ob vmesni podpori (točka B na obtežno-deformacijski krivulji), ki ji hitro sledi še mehčanje betona v tlačni coni (točka C), kar se odraža v lokalizaciji deformacij v kratkih elementih 10 in 11 ob vmesni podpori (glej črtkano krivuljo na sliki 11(a)). Pri nadaljnjem naraščanju obtežbe nosilca pride še do plastifikacije natezne armature in mehčanja betona v prvem polju nosilca (točki D in E na obtežno-deformacijski krivulji), ki ji brž sledi še plastifikacija tlačne armature (točka F). Posledično zaznamo lokalizacijo deformacij tudi v kratkih elementih 3 in 4 (polna krivulja na sliki 11(a)). Računsko določena največja obtežba nosilca znaša $P_{max} = 161,8$ kN pri navpičnem pomiku $w_c = 37,3$ mm (točka G). Nato sledi zmanjševanje obtežbe P ob sočasnem naraščanju deformacij nosilca. Računska porušitev nastopi v točki H, ko pride do tlačne porušitve betona v levem polju nosilca. Takrat je lokalizacija deformacij v kratkem elementu 4 v polju nosilca zelo izrazita (glej sliko 11(b)).

A	B	C	D
1. inkrement	12. inkrement	15. inkrement	22. inkrement
neobtežen nosilec (samo lastna teža)	plastifikacija zgornje arm. ob vmesni podpori	mehčanje betona v tlaku ob vmesni podpori	plastifikacija spodnje arm. v polju
E	F	G	H
24. inkrement	26. inkrement	32. inkrement	41. inkrement
mehčanje betona v tlaku v polju	plastifikacija zgornje arm. v polju	dosežena največja obtežba P_{max}	tlačna porušitev betona v polju

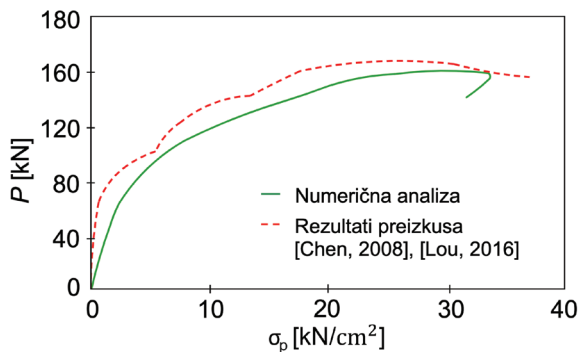
Preglednica 6. Stanja v analiziranem nosilcu pri karakterističnih točkah na obtežno-deformacijske krivulje.



Slika 11. Potek upogibne deformacije v betonu k_c vzdolž armiranobetonskega nosilca, ki pripada karakteristični točki: (a) C in F ter (b) H na obtežno-deformacijski krivulji.

Pri pojavu lokalizacije deformacij, kot jih prikazujemo na sliki 11, in sočasnem materialnem mehčanju betona v tlaku (naraščanju tlačnih deformacij ob zmanjševanju napetosti), je treba še posebej izpostaviti, da v kolikor tega problema ne bi reševali s pomočjo »kratkih« elementov, bi imeli v numerični analizi težave s konvergenco računskega postopka. To bi se v primeru obravnavanega kontinuirnega nosilca, ki je v osnovi statično nedoločena konstrukcija in pri kateri je možna prerazporeditev obremenitev, zgodilo, še preden bi bila v analizi dosežena mejna obtežba nosilca.

V nadaljevanju na sliki 12 predstavimo še spreminjanje napetosti v kablju, prav tako na sredini levega polja. V tem primeru je ujemanje nekoliko slabše, vendar še vedno v mejah inženirske natančnosti. Razhajanje rezultatov je lahko posledica napačne izbire koeficienta trenja v numerični analizi oziroma napak pri meritvah. Je pa na sliki 12 lepo vidna razbremenitev kabla v zadnji fazi numerične analize.



Slika 12. Spreminjanje napetosti v kablju na sredini levega polja.

6 SKLEP

V prispevku smo predstavili matematični model za analizo mehanskega odziva naknadno prednapetega armiranobetonskega nosilca z nepovezanimi ukrivljenimi kabli, ki je izpostavljen kratkotrajni statični obtežbi. Izpeljane enačbe, ki smo jih zapisali ločeno za betonski nosilec z mehko armaturo in za kabel, smo rešili s pomočjo metode končnih elementov. Primernost in natančnost razvitega matematičnega modela smo prikazali na dveh primerih naknadno prednapetih nosilcev, za katera so v literaturi na voljo dobro dokumentirani eksperimentalni rezultati. V prvem računskem primeru smo analizirali mehanski odziv prednapetega prostoležečega nosilca. Ugotovili smo zelo dobro ujemanje med izračunanim in izmerjenim ra-

zvojem navpičnega pomika na sredini razpetine nosilca v odvisnosti od velikosti navpične obtežbe vse do porušitve. Med preizkusom je bila porušitev nosilca posledica porušitve kabla, v numerični analizi pa se je to odrazilo s prekoračitvijo porušne deformacije kabla. V drugem računskem primeru pa smo analizirali mehanski odziv prednapetega nosilca preko dveh polj. Tudi v tem primeru smo ugotovili zelo dobro ujemanje med izračunanim in izmerjenim razvojem navpičnega pomika na sredini levega polja kontinuirnega nosilca v odvisnosti od velikosti navpične obtežbe, medtem ko je bilo ujemanje spreminjanja napetosti v kablju nekoliko slabše, vendar še vedno v mejah inženirske natančnosti. Računska porušitev nosilca je bila posledica tlačne porušitve betona v levem polju nosilca. Med numerično analizo mehanskega odziva nosilca smo na več mestih v nosilcu zaznali tudi pojav lokalizacije deformacij in sočasnega mehčanja betona v tlaku. Ta pojav smo numerično uspešno rešili s pomočjo »kratkih« elementov. Na podlagi zapisanega lahko zaključimo, da je predstavljen model zanesljiv, natančen in numerično učinkovit. V nadaljevanju ga bomo nadgradili tako, da bo omogočal simulacijo mehanskega odziva prednapetih elementov tudi v pogojih požarne obtežbe.

7 ZAHVALA

Delo P. Kočmana, J. Č. Kolšek in S. Bratine financira Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije (ARIS) v sklopu raziskovalnega programa P2-0158. Za podporo se zahvaljujemo.

8 LITERATURA

- Bažant, Z. P., Pijaudier-Cabot, G., Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum, *Journal of Engineering Mechanics*, 115(4), 755–767, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1989\)115:4\(755\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:4(755)), 1989.
- Bergan, P. G., Holand, I., Nonlinear finite element analysis of concrete structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17–18, 443–467, [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(79\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0045-7825(79)90027-6), 1979.
- Bratina, S., Saje, M., Planinc, I., On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames, *International Journal of Solids and Structures*, 41(24–25), 7181–7207, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.004>, 2004.
- Burns, N. H., Helwig, T., Tsujimoto, T., Effective Prestress Force in Continuous Post-Tensioned Beams With Unbonded

Tendons, *ACI Structural Journal*, 88(1), 84–90, <https://doi.org/10.14359/2780>, 1991.

CEB-FIP Model Code 1990: Design Codes, Comité Euro-International du Béton and Fédération International de la Précontrainte, London: Thomas Telford, 1993.

Chen, Y. W., The experimental researches on unbonded partially prestressed concrete continuous beams, Changsha, China: Hunan University, 2008.

Crisfield, M. A., A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "snap-through", *Computers and Structures*, 8(1–3), 55–62, [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5), 1981.

Desayi, P., Krishnan, S., Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete, *ACI Journal Proceedings*, 61(3), 345–450, <https://doi.org/10.14359/7785>, 1964.

Durand, R., Vieira, J. F., Farias, M. M., Numerical analysis of bonded and unbonded prestressed RC beams using cohesive and non-compatible rod elements, *Engineering Structures*, 288, 116157, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116157>, 2023.

Hughes, T. J. R., Pister, K. S., Consistent linearization in mechanics of solids and structures, *Computers & Structures*, 8(3–4), 391–397, [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(78\)90183-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(78)90183-9), 1978.

Hussien, O. F., Elafandy, T. H. K., Abdelrahman, A. A., Abdel Baky, S. A., Nasr, E. A., Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams, *HBRC Journal*, 8(3), 239–251, <https://doi.org/10.1016/j.hbrj.2012.10.008>, 2012.

Jancy, A., Stolarski, A., Zychowicz, J., Experimental and Numerical Research of Post-Tensioned Concrete Beams, *Materials*, 16(11), 4141, <https://doi.org/10.3390/ma16114141>, 2023.

Kline, M., *Calculus: an intuitive and physical approach* (2nd ed., Vol. 61). Wiley, <https://doi.org/10.1017/S0025557200085132>, 1977.

Krätzig, W. B., Pölling, R., An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters, *Computers & Structures*, 82(15–16), 1201–1215, <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.002>, 2004.

Lou, T., Lopes, S. M. R., Lopes, A. V., Response of continuous concrete beams internally prestressed with unbonded FRP and steel tendons, *Composite Structures*, 154, 92–105, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.028>, 2016.

Markovič, M., Krauberger, N., Saje, M., Planinc, I., Bratina, S., Non-linear analysis of pre-tensioned concrete planar beams, *Engineering Structures*, 46, 279–293, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.08.004>, 2013.

Reissner, E., On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem, *Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP*, 23(5), 795–804, <https://doi.org/10.1007/BF01602645>, 1972.

SIST EN 1992-1-1:2005, Evrokod 2, Projektiranje betonskih konstrukcij–Del 1-1, Splošna pravila in pravila za stavbe, Slovenski inštitut za standardizacijo, Ljubljana, 2005.